A Parte Rei. Revista de Filosofía

Un nuevo enfoque para un viejo problema. Origen de las paradojas en Teoría de Conjuntos

Francisco Blanco

Resumen

Se presenta una nueva interpretación sobre el origen de las paradojas en la Teoría de Conjuntos, proponiendo una nueva forma de resolverlas. Se comienza por una breve exposición de las paradojas más conocidas y la crítica de las principales soluciones tradicionalmente propuestas.

1. El origen e interés de la teoría de conjuntos

En su afán por fundamentar lo mejor posible la matemática, a lo largo del siglo XIX y principios del XX, los matemáticos fueron esforzándose por clarificar las bases sobre las que ésta se asentaba. De esta forma se llegó a la conclusión de que sus principales ramas como la geometría, el álgebra o el análisis en esencia pueden construirse partiendo de una única denominada "Teoría de Conjuntos".

La introducción de la teoría de conjuntos, más allá de su utilidad en la tarea de fundamentar las matemáticas, resultó ser una herramienta imprescindible en casi todas sus ramas: Permitió clarificar y formalizar multitud de técnicas o conceptos que hasta entonces se habían empleado de modo implícito o incluso habían pasado desapercibidos.

En la teoría de conjuntos el concepto básico (conjunto) se podría definir como "cualquier colección de objetos cuyos elementos estén bien determinados". Haciendo énfasis en que lo característico de un conjunto son sus elementos, no la forma en que sea expresado o haya sido definido, se suele añadir otro principio básico: "si dos conjuntos tienen los mismos elementos, entonces son el mismo conjunto".

Las dos definiciones anteriores pueden considerarse los axiomas básicos de la teoría y, a pesar de su aparente simplicidad, su desarrollo cuidadoso permite llegar a resultados realmente formidables. Para que estos dos axiomas puedan utilizarse de forma inequívoca y sea viable operar con ellos de modo automático, deben escribirse en lenguaje formalizado, empleando signos lógicos de propiedades precisas. Para los fines de esta exposición procuraremos hacer el mínimo uso posible de dicho lenguaje formalizado, conformándonos con indicar el modo en que habitualmente se escriben con él los dos axiomas básicos citados.

La formalización de la segunda noción como un axioma "de identidad" no es difícil.

Ax-Iden: *Dados dos X e Y cualesquiera,* $\forall z\,(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \leftrightarrow X=Y$.

Por otra parte, la formalización del primer principio requiere concretar la idea de "propiedad" que caracteriza los elementos del conjunto, para lo cual se introduce el concepto de "descripción precisa" P(x). Con ella el axioma se expresa afirmando que *toda descripción precisa define un conjunto* (el de los objetos que la cumplen). De este modo el "Axioma de formación" se formalizaría:

***Ax-Form**: $\forall P(x)\ \exists Y\ \forall x(\ x \in Y \leftrightarrow P(x)\ )$.*

De modo más intuitivo podemos escribir $\forall P(x)\ \exists Y=\{x : P(x)\}$.

Por descripción precisa debemos entender cualquier expresión simbólica bien definida que tenga libre la variable x. Cabe resaltar que el axioma de formación en realidad es un "patrón de axiomas" ya que para cada elección de la propiedad P(x) resulta un axioma afirmando la existencia de cierto conjunto.

La anterior presentación del axioma de formación se mostró pronto inadecuada. El análisis de las dificultades a que ha dado lugar y de las correcciones propuestas, tanto las tradicionales como las nuevas que propondremos aquí, será básicamente el propósito de esta exposición.

Es admirable la cantidad de resultados que el uso sistemático de los anteriores dos axiomas permite establecer, comenzando por la existencia del conjunto vacío $\emptyset$ (el asociado a la propiedad P(x) "$x \neq x$"). Para este peculiar conjunto tenemos un buen ejemplo de la acción combinada de los distintos elementos de la teoría: el Ax-Form asegura su existencia, el Ax-Iden asegura que es único, y su propiedad definitoria determina sus elementos (en este caso ninguno, al no existir objetos que cumplan $x \neq x$).

El uso sistemático de los dos axiomas básicos permite definir multitud de objetos interesantes, y deducir para ellos un conjunto de resultados (teoremas) que pueden utilizarse como ladrillos básicos de toda la fundamentación matemática. Algunos de éstos son:

1. Existe el conjunto vacío, y es único.
2. Dados dos conjuntos pueden definirse pares de conjuntos.
3. Dados dos conjuntos (o incluso cualquier cantidad de ellos) puede definirse su unión.
4. Puede definirse el concepto de "conjunto sucesor" de cualquier conjunto, y con él, conjuntos con un número arbitrario de elementos. Dicho proceso lleva a la creación de los números naturales.
5. Pueden definirse la "potencia" de un conjunto, o "conjunto de partes" de un conjunto.
6. Pueden definirse el concepto de "Par ordenado de dos objetos", y con él el de "producto cartesiano" de dos conjuntos. A partir del producto cartesiano se pueden definir los conceptos de relación o correspondencia, y de funciones entre conjuntos.
7. Puede construirse el concepto de "cardinal" de un conjunto, tanto si es finito como infinito. Dentro de los infinitos puede demostrarse que existen conjuntos con distintos grados de infinitud $\aleph_0$, $\aleph_1$, ... (de los que el más pequeño $\aleph_0$ es el de los números naturales).

La exposición detallada de cómo se obtienen todos estos resultados es una lectura deliciosa que no presentaremos aquí por ser algo extensa y por existir ya espléndidos textos dedicados a ella. Recomendamos al lector interesado su lectura, advirtiendo que cualquiera de ellos requiere un pequeño esfuerzo inicial para familiarizarse la simbología empleada. El esfuerzo se ve recompensado con creces.

Los planteamientos y resultados descritos hasta aquí se deben básicamente a Cantor y Frege. Las teorías desarrolladas por ambos difieren básicamente en el distinto enfoque empleado: más centrado en la matemática para el primero y más en la lógica para el segundo.

El establecimiento de todo el espléndido edificio tuvo un tinte agridulce para sus creadores. Por una parte permitía fundamentar en poquísimos resultados, elementales y muy intuitivos, la práctica totalidad de las matemáticas conocidas. Por otra parte, y casi simultáneamente, descubrieron que los dos axiomas fundamentales permiten también generar resultados inaceptables por contradictorios, las llamadas paradojas.

Ello supuso el reconocimiento de que la forma dada a los dos postulados básicos era inaceptable, y la necesidad de introducir modificaciones. Han sido muchas las variantes empleadas para reformular la teoría de conjuntos, y en general en todas ellas es preciso resignarse a perder parte de la simplicidad original.

En primer lugar comentaré, sin entrar en detalles, las contradicciones que más relevancia han tenido en el replanteamiento de la teoría de conjuntos. En segundo lugar comentaré también algunas de las soluciones propuestas. Analizando las primeras y criticando las segundas, expondré también la posibilidad de un enfoque nuevo que nos sugerirá una solución alternativa.

2. Principales paradojas en la Teoría de Conjuntos de Cantor

Repasemos en primer lugar algunas paradojas que surgen en relación con conjuntos tan tremendamente grandes, que se han dado en llamar "monstruos". Sorprendentemente las "descripciones precisas" P(x) que dan lugar a estos mega - objetos indeseables son sumamente sencillas: "$x=x$" y "$x\notin x$". Dado que ambas descripciones están perfectamente bien definidas, Ax-Form asegura la existencia de sus respectivos conjuntos: $U=\{x : x=x\}$, $R=\{x : x\notin x\}$.

El primero U contiene a todos los objetos que cumplen $x=x$, es decir a todo conjunto u objeto imaginable, es el llamado conjunto universal, el mayor posible.

En cuanto a R, la descripción $x\notin x$ es algo más complicada pero, a poco que uno busque ejemplos, se encuentra que la inmensa mayoría de los conjuntos imaginables la cumplen. R es casi tan grande como U, faltándole sólo algunos raros objetos que tengan la propiedad $x\in x$.

El conjunto R esconde una contradicción llamada "paradoja de Russell": Si suponemos que $R\in R$ entonces, por ser elemento de R, también debe cumplir $R\notin R$. Si por el contrario suponemos que $R\notin R$ entonces, R cumple la condición para estar en R, por lo que $R\in R$. R a la vez pertenece y no pertenece a sí mismo.

El conjunto U hace surgir la llamada "paradoja de Cantor" al considerar su "conjunto de partes" P(U). Según el teorema de Cantor para cualquier conjunto C finito o infinito, su conjunto de partes P(C) es mayor que él cumpliéndose card C<card P(C). Pero ... U ya era el mayor conjunto posible, ¡cómo puede ser P(U) mayor aún!.

Sin necesidad de definir extraños conjuntos, el Ax-Form en su forma original da problemas por sí mismo. Supongamos que queremos utilizarlo para definir cierto conjunto "Y" utilizando una propiedad "P" en que intervienen como variables no sólo una "x" arbitraria, sino también la misma "Y". Nada en el Ax-Form nos impide esta libertad que, a primera vista, parece inocente y enriquecedora.

Pues bien, basta con considerar una propiedad P(x,Y) tan sencilla como la $x\notin Y$ para encontrarnos con el contradictorio conjunto $Y=\{x : x\notin Y\}$. Nótese que los elementos que pertenecen al conjunto $x\in Y$ tienen como propiedad definitoria la de no pertenecer al conjunto $x\notin Y$, mientras que los elementos que cumplen $x\notin Y$ son precisamente los que contiene el conjunto ($x\in Y$). Todo objeto pertenece y a la vez no pertenece al Y. Esta se denomina "paradoja de la Y variable" y, aunque publicada en 1903 por Russell, parece que había sido descubierta algo antes por Zermelo de modo independiente.

Otra paradoja de exposición algo más compleja es la llamada de Burali-Forti, relacionada con los conjuntos ordinales. Aunque el concepto de "ordinal" es algo complejo, para la exposición y crítica de la paradoja nos bastará con citar algunas ideas básicas. De un conjunto se dice que es ordinal si en su seno la relación de pertenencia es transitiva y establece una buena relación de orden ($a_1 \in a_2 \in ...$, al estilo $x_1 < x_2 < ...$). Una propiedad importante de este tipo de conjuntos es que a cualquiera de ellos A se le puede asociar otro S(A) llamado "sucesor" suyo que también es ordinal y más amplio que el original. Pues bien, la propiedad "ser ordinal" permite definir mediante Ax-Form el conjunto de todos los ordinales $\Omega=\{x : x \text{ es ordinal}\}$. Dicho conjunto resulta ser paradójico porque, según puede demostrarse Ω también es ordinal (el mayor de todos), ¡pero entonces $S(\Omega)$ debería ser otro ordinal más "amplio" aún!.

3. Correcciones tradicionales a la Teoría de conjuntos.

Ante las anteriores paradojas, la interpretación tradicional suele ser la de sospechar de conjuntos excesivamente inmensos: El conjunto de todos los objetos posibles U, el más grande de los infinitos ordinales Ω, el conjunto R de todos los objetos que cumplen una condición fácil de cumplir, ...

Las principales soluciones propuestas han ido encaminadas a eliminar el axioma de formación, origen de tantas extrañas construcciones. Como consecuencia, multitud de resultados necesarios para la teoría, que Ax-Form proporcionaba, deben ahora proporcionarse uno a uno en forma de postulados.

La primera y más conocida de estas propuestas apareció en 1908 debida a Zermelo. Completada y formalizada por Fraenkel en 1922 ésta teoría (Z-F) es la considerada actualmente como forma estandard de la teoría de conjuntos. *(Zermelo: Berlin 1871-Friburgo 1953, Fraenkel: Munich 1891-Jerusalen 1965)*

Básicamente el trabajo de Z-F consistió en analizar qué resultados de la teoría de conjuntos de Cantor se pierden al suprimir el Axioma de Formación y deben ser postulados en su lugar. En esencia dichos postulados son los siguientes:

- A1. Axioma de Extensionalidad: El mismo Ax-Iden.
- A2. Axioma del conjunto vacío: Existe un conjunto sin elementos.
- A3. Axioma de Pares: Dados dos conjuntos puede formarse el conjunto de pares de sus elementos.
- A4. Axioma de Uniones: Existe el conjunto unión de otros conjuntos.
- A5. Axioma del Conjunto Infinito: Existe algún conjunto con infinitos elementos.
- A6. Axioma del Conjunto Potencia: Dado un conjunto, existe el conjunto formado por todos sus subconjuntos (su "Conjunto de Partes").
- A7. Axioma de Separación: Análogo al Ax-Form permite definir nuevos conjuntos por sus propiedades, pero operando sólo sobre objetos que ya formaban un conjunto. En otras palabras, permite definir sub-conjuntos de uno dado.
- A8. Axioma de Reemplazo: Afirma la existencia de un concepto similar al de "Función".

El principal motivo para citar aquí todos estos axiomas, es mostrar lo lamentable que resulta tener que postular tantas cosas, cuando en la teoría original la mayoría se deducían como teoremas.

Por otra parte, la formulación Z-F de la teoría cumple su objetivo: Los conjuntos U, R u Ω ahora no existen, ni existen conjuntos con la propiedad $x \in x$. De paso se prohibe explícitamente la posibilidad de usar propiedades auto-referentes tipo P(x,Y) como la que originaba la paradoja de la variable Y. En la teoría ZF se postulan todos los objetos básicos necesarios y cualquier otro se deberá deducir a partir de ellos, sin poder crear objetos nuevos a partir de propiedades arbitrarias. Todas las paradojas anteriores han desaparecido.

A pesar de las ventajas de la nueva teoría Z-F, se hecha en falta en ella la posibilidad tan intuitiva de que a cada propiedad pueda asociarse la colección de objetos que la verifican. Con esta intención han sido desarrollados sistemas más complicados como las llamadas "Teorías de Clases".

En 1925 Von Neumann presenta el primer sistema axiomático que permite volver a considerar las "clases universales" descartadas en el sistema Z-F (clases universales de todos los conjuntos, de todos los ordinales, de todos los cardinales, ...). El concepto primario utilizado por Von Neumann fue el de función y no el de conjunto o clase. La reformulación de este sistema retomando como conceptos primarios los de clase y elemento de clase se debe a Bernays, que además aportó rigor a la axiomática de la teoría. Por último a Gödel debemos importantes precisiones sobre la formalización y sobre los aspectos de completitud y compatibilidad de los axiomas. *(Von Neumann: Budapest 1903- Washington -1957, Bernays: Londres 1988- 1980, Gödel: Brünn 1906 – Princeton 1978)*

En estas teorías los objetos definidos por propiedades arbitrarias de sus componentes se denominan "Clases", y a ellas es a las que se aplican los axiomas originales Ax-Iden y Ax-Form. El concepto más restrictivo de "conjunto" se reserva para aquellas clases de las que se pueda asegurar que están "delimitadas" por pertenecer a alguna otra clase. Las clases que no tienen la limitación de pertenecer a ninguna otra se denominan "clases propias" y serían aquellas "demasiado grandes" para ser conjuntos. Ejemplos de *clases propias* serían la clase universal U formada por todos los conjuntos, o la R definida antes.

Para las "clases", este procedimiento permite mantener casi todos los resultados que en la teoría original se obtenían para los conjuntos, y la libertad de asociar un clase a cualquier propiedad imaginable.

Para los "conjuntos", objetos ahora más restringidos, este procedimiento evita las paradojas sobre auto-pertenencia y conjuntos universales, pero mantiene el inconveniente tener que postular bastantes propiedades que no pueden deducirse: En concreto hacen falta nuevos axiomas para establecer qué propiedades de las "clases" son aplicables también a los "conjuntos", o que "clases" tienen la categoría de "conjunto".

Los principales postulados que deben introducirse en este sistema son:

- *Axioma del par no ordenado (Los pares de conjuntos son también conjuntos).*
- *Axioma de la unión (Cualquier unión de conjuntos también es un conjunto).*
- *Axioma del conjunto vacío (La clase vacía es un conjunto -el conjunto vacío-).*
- *Axioma de sustitución (Un subconjunto de un conjunto también es un conjunto).*
- *Axioma de infinitud (Por inducción se pueden generar conjuntos con infinitos elementos).*

- *Axioma de las partes (La clase formada por las partes de un conjunto es otro conjunto).*

Puede concluirse que la única ventaja de este complejo sistema de clases+conjuntos es que permite manejar sin contradicciones objetos mas amplios que los conjuntos de la teoría Zermelo - Fraenkel.

Como inconveniente cabe destacar su mayor complicación, y la necesidad de postular en ella muchas propiedades que antaño eran teoremas.

4. Nuevo punto de vista sobre la naturaleza de las paradojas.

Como ya se ha indicado, la idea comúnmente aceptada es que los axiomas originales dejan demasiada libertad para definir conjuntos excesivamente grandes. El procedimiento de Zermelo-Fraenkel, limitando severamente el axioma de formación, evita las paradojas pero lo deja tan mutilado que no permite obtener ningún resultado importante. Todos los resultados básicos de la teoría deben postularse ahora como nuevos axiomas.

La nueva propuesta que expondré aquí es que el problema era de otra naturaleza, y podría corregirse de forma menos radical.

Las ideas básicas que intentaré exponer son:

1. Lo que tiene de inaceptable el Ax-Form en su forma original no es que permita definir objetos demasiado grandes, sino que permite hacer malas definiciones.
2. Algunas de las paradojas surgen de un planteamiento Platonista demasiado radical.
3. El problema de los principales conjuntos paradójicos no es su tamaño, sino su ambigüedad: están mal definidos.

En el establecimiento y uso del Ax-Form, dos principios básicos que se enseñan a cada estudiante de lenguaje o matemáticas parecen haber sido olvidados por los padres de la Teoría de Conjuntos:

- En una definición no debe entrar lo definido.
- Las matemáticas sólo se ocupan de objetos con propiedades bien definidas.

El estudio de objetos con propiedades subjetivas es materia de otras ciencias.

Mostraré que una pequeña reformulación del axioma de formación respetuosa con estos dos principios resolvería todos los problemas paradójicos, manteniendo la simplicidad y posibilidades de la teoría original.

En primer lugar, analizando la paradoja de la variable *Y*, salta a la vista que allí se está utilizando descaradamente lo definido (*Y*) para dar su definición. Deberíamos descartar del principal axioma de la teoría esta práctica detestable pues, en vez de una presunta riqueza de posibilidades constituye una segura fuente de problemas. De hecho en la teoría ZF se hace así, indicando explícitamente que la propiedad *P* usada para definir un conjunto *Y* no debe hacer referencia a él ("en la descripción precisa con que se define el objeto *Y* no debe estar presente la variable *Y*").

En cuanto al principio de que todo objeto matemático debe estar claramente definido sin posibilidad de ambigüedades, éste no se respeta en absoluto al definir los conjuntos paradójicos U y R mediante el Ax-Form. Comencemos por observar en detalle el conjunto U.

U es el conjunto de "todos los objetos" pero, seamos realistas, ¿de qué "*TODOS"* hablamos?. Esos *TODOS* ¿se refiere a todos los que hayan sido definidos en la teoría en algún momento?, ¿se refiere a todos los que alguien pudiera definir?, ¿incluye a los que vayan definiéndose en el futuro?. ¡Nótese que un objeto matemático no existe hasta que es creado y toma forma en una definición! ¿Acaso van incorporándose a U objetos a medida que la teoría avanza?.

Claramente el conjunto U no está bien definido, pues sus elementos son cambiantes en función de qué nuevos objetos se nos ocurra crear a capricho. El supuesto conjunto U contendría por ejemplo a las funciones, pero ¿qué funciones? ¡el concepto de *función* ha cambiado mucho durante la historia de las matemáticas! ¿acaso el contenido de U varía con el tiempo o las modas?

Como puede verse, la definición de U dada supone implícitamente un Platonismo radical: sólo tiene sentido si se admite que los objetos matemáticos (todos y en todas sus versiones imaginables) preexisten, independientemente de que decidamos o no crearlos.

La solución es obvia y muy simple: Un objeto cuya definición es ambigua (como el U cuyos elementos no están bien definidos) no es un objeto matemático aceptable. Debe descartarse o definirse de otra forma.

Claramente el Axioma de Formación debe ser reformulado para exigir explícitamente el cumplimiento de esta condición.

Otro tanto ocurre con el conjunto R. Este conjunto contiene a todos los objetos que cumplen $x \notin x$. Pero ... todos ¿qué objetos?. De nuevo, cualquier objeto nuevo que se cree con la propiedad $x \notin x$ pasa a engrosar R. Al igual que U, R no está bien definido y no debe aceptarse en la teoría mientras no se defina correctamente y sin ambigüedad.

El conjunto Ω de todos los ordinales, origen de la paradoja Burali-Forti, es de la misma naturaleza que U ó R. ¿Qué objetos contiene Ω? Los ordinales no están todos definidos de antemano ¡Cada vez que se defina un nuevo conjunto, si resultase ser ordinal, Ω tendrá un elemento más. Ω es un conjunto mal definido y debe descartarse.

Es fácil poner otros ejemplos de este tipo. Así del conjunto $V=\{x : x \in x\}$ no se sabe que haya sido nunca origen de problemas, pero adolece de la misma ambigüedad que los anteriores: La imaginación de algún matemático para crear nuevos objetos con la propiedad $x \in x$ vendría a engrosar su contenido. Siguiendo el mismo criterio debe ser descartado.

El caso de la propiedad "$x \neq x$" es muy diferente del de los anteriores ejemplos, pues el conjunto que determina (el vacío) resulta perfectamente definido por ella $\varnothing=\{x : x \neq x\}$. Efectivamente, para cualquier objeto "a" que ya haya sido definido, como no cumple "$a \neq a$" no está en $\varnothing$. Cualquier otro objeto que no haya sido creado, como no existe aún, tampoco está en $\varnothing$. Futuros objetos que puedan definirse, como a buen seguro no cumplirán "$a \neq a$", tampoco pueden afectar su contenido. Por tanto los elementos de $\varnothing$ están bien definidos y no dependen del capricho creador de nadie.

En definitiva, la libertad del matemático para crear nuevos objetos no es absoluta: los nuevos objetos deben estar bien definidos y, puesto que un conjunto se caracteriza por sus elementos no es aceptable uno cuyos elementos estén en parte por decidir.

A este respecto debe distinguirse en una definición la *ambigüedad* de la *dificultad* para obtener algún resultado.

Como ejemplo puede servir el conjunto propuesto por Dedekind de *"los números reales trascendentes"*. Este conjunto está bien definido: aunque no sepamos para muchos números irracionales si son trascendentes o no, ello sólo refleja nuestra ignorancia, no una ambigüedad. Ningún descubrimiento futuro cambiará la pertenencia o no de cualquiera de estos números al conjunto, aunque sí pueda cambiar nuestra información al respecto. Tampoco podemos crear nuevos números reales trascendentes que engrosen el conjunto de Dedekind, pues los números reales ya están todos definidos.

En matemáticas la libertad de crear nuevos objetos tiene sus límites. Todo el mundo es consciente de que una limitación para cada nuevo objeto es su no - contradicción. Igualmente importante, pero no siempre recordado, es que todo nuevo objeto debe estar bien definido. Este y no otro parece el origen de las dificultades en la teoría Cantoriana.

5. Visto el problema... ¿la solución?

Identificado el problema, la solución parece casi trivial: Limítese el axioma de formación en el sentido de hacerlo preciso, no en el de hacerlo inoperante. Una posible propuesta pudiera ser la siguiente:

Ax-Form *(reformulado)*
Toda descripción precisa P(x) define un conjunto Y={x : P(x)} sólo si se cumple:
I. En la descripción P(x) no figura Y como variable.
II. P(x) fija por sí sola los elementos de Y, sin que la adición de nuevos objetos a la teoría pueda alterar éstos.

Cabe esperar que tales modificaciones basten para eliminar las indeseables paradojas de la Teoría de Cantor, a la vez que se mantiene intacta la potencia de sus dos axiomas básicos para generar todos los resultados habituales necesarios.

Hecha la propuesta queda por delante la tarea de formalizarla para desarrollar sus posibilidades. Para empezar se deberá establecer cómo garantizar en la práctica la condición *II* del nuevo axioma. Después deberá mostrarse cómo actúa dicho procedimiento sobre cada una de las tradicionales paradojas. Aunque el objetivo de esta exposición no sea el acometer tales tareas, sí bosquejaré una posible forma de hacerlo.

Admitamos por convenio que, a la hora de hacer cualquier definición, se deben respetar las siguientes restricciones:

i. No puede contarse con objetos aún no definidos
ii. Una vez definido un objeto, éste debe considerarse inalterable, a no ser que explícitamente se redefina más adelante.

Un convenio como éste hace superfluas las condiciones *I* y *II* del *Ax-Form modificado*, pues garantiza que cada objeto, una vez definido no será alterado por la introducción arbitraria de nuevos objetos. Además, el que en una definición no pueda hacer uso de objetos aún no definidos, excluiría la auto-referencia.

Supongamos que en este contexto se define el conjunto U={x : x=x}. Tal conjunto contiene a todos los objetos (definidos con anterioridad) que cumplan x=x. Lo primero que salta a la vista es que su definición es contextual: depende de qué objetos se hayan definido previamente. No obstante su contenido puede ser muy amplio: los infinitos elementos de todo conjunto de números previamente definido, sus uniones, productos cartesianos, ... Por el contrario hay objetos que no contiene, como los derivados de él mismo, puesto que no existía previo a su definición. Así no estarían en él P(U) o U∪..., de forma que nuestro conjunto U no dá ahora lugar a ninguna de las paradojas que antes causaba. Lo mismo ocurriría si definiésemos el análogo a los conjuntos R, V ó Ω.

Es posible que ninguno de estos conjuntos ahora "dependientes del contexto" fuese demasiado útil, pero al menos ni están prohibidos (como en la teoría Z-F) ni son paradógicos como en la teoría de Frege-Cantor.

Debemos insistir en que la adopción de un convenio como el anterior, "*contar en cada momento sólo con objetos previamente definidos*", no tiene por finalidad impedir la creación de conjuntos muy grandes, sino impedir la definición imprecisa de conjuntos.

Para este mismo fin, un procedimiento alternativo sería el de fijar por convenio cierto conjunto de referencia especificando los objetos disponibles por defecto. Dicho procedimiento es, por otra parte, el habitual en algunos estudios de lógica, y a tal conjunto "universal" se denomina en ese ámbito *Universo del Discurso*.

6. Otro enfoque del problema: La precaución al hablar de "todo" y el cuantificador universal.

Los dos cuantificadores más habituales en matemáticas "para todo" (∀) y "existe algún" (∃) han recibido tradicionalmente un trato muy desigual, y no me refiero a su uso, sino a la confianza depositada en ellos. El cuantificador ∀ raramente ha levantado sospechas usado para hacer afirmaciones sobre "todos" los objetos de algún tipo. Por el contrario el cuantificador ∃, con su significado habitual de "existe algún ...", ha sido objeto de la mayor parte de las críticas cada vez que se ha buscado un culpable. Creo que ello es injusto o al menos injustificado.

Cuando se usa ∃ para significar que "entre cierta colección de objetos bien establecidos *existe* uno que cumple tal propiedad", pueden ocurrir varias cosas: La afirmación puede ser falsa, si la propiedad exigida no la satisface ninguno de los objetos que se están considerando. La afirmación puede ser cierta, si hay alguno que la cumpla (aunque ignorásemos cual).

¿Podría ser indecidible una afirmación así? Lo dudo mucho, siempre que partamos de objetos previamente bien definidos a los que se exija una condicción no ambigua. Por el contrario ∃ será fuente casi segura de problemas usado sobre colecciones imprecisas de objetos o sobre objetos no definidos previamente, por ejemplo con el significado de "puede definirse o imaginarse un objeto con la propiedad ...". Por suerte, no es habitual semejante uso.

El extremo opuesto de "extremada prudencia" sería la postura intuicionista, que propone ignorar o dudar de cualquier objeto que no pueda mostrarse o construirse explícitamente. Semejante extremismo resulta sumamente empobrecedor.

A diferencia del cuantificador existencial ∃, el cuantificador universal ∀ con su interpretación habitual de "para todo..." ha sido pocas veces llevado al banquillo de los acusados. Pues bien, cada vez que nos podamos preguntar ¿a qué *todo* se refiere? y la respuesta no sea clara, deberíamos ponernos en alerta. No voy a afirmar aquí que el cuantificador ∀ sea en sí problemático, pero sí que es fácil hacer un uso ambíguo de él y que éste es, en ocasiones, el origen de muchos problemas.

Cada vez que se usa ∀ con el sentido de "para todo objeto *dado*..." o "*dado* cualquier objeto..." no debería ser origen de ningún tipo de dificultad. Alternativamente puede acordarse que la interpretación "para *todo*..." se refiere a cualquiera de los objetos previamente definidos en la teoría o pertenecientes a algún "unvierso de discurso" previamente especificado.

Por el contrario la interpretación de *todo* como "todo posible objeto" o "todo objeto imaginable o definible" debe considerarse ambigua e imprecisa, y por ello inaceptable en matemáticas. Como ya se ha explicado en el anterior apartado, este tipo de interpretaciones es precisamente el origen de muchas paradojas conjuntistas.

Tal vez convendría recordar de vez en cuando la relación existente entre ∀ y ∃: Dada una relación *R*, "∀Rx" es equivalente a "no∃x noRx". Con otras palabras "todo x cumple R" equivale a "ningún x incumple R".

Si, como hemos indicado antes, el cuantificador ∃ debe suponerse siempre referido a objetos previamente especificados, la expresión "no∃x noRx" o su equivalente a "∀Rx" deben interpretarse como afirmaciones sobre objetos previamente especificados: indican propiedades que ninguno "*de ellos*" o bien todos "*ellos*" cumplen.

En definitiva, al igual que es costumbre con el cuantificador ∃, debe cuidarse usar el cuantificador ∀ siempre operando sobre objetos bien especificados.

Las anteriores consideraciones nos vuelven al llevar al punto ya expuesto en el anterior apartado. Una postura Platonista "radical" que suponga la preexistencia de cualquier objeto imaginable, o cuente con objetos aún por definir, es inaceptable en matemáticas, y sólo puede ser origen de problemas y ambigüedades. Por el contrario no veo ninguna objeción a una postura Platonista "moderada", si entendemos por tal el considerar que los objetos matemáticos (una vez correctamente definidos) tienen existencia propia real y propiedades que están por descubrir. Un tal moderado Platonismo no sólo es correcto, sino que resulta una actitud recomendable y reconfortante cuando se trabaja en matemáticas.

7. Conclusiones

Al contrario de lo que suele suponerse, las conocidas inconsistencias de la teoría de conjuntos de Cantor no surgen de la posibilidad de crear macro-conjuntos excesivamente grandes, sino de su mal uso para crear conjuntos mal definidos.

La introducción de algunas precisiones en su Axioma de Formación puede corregir dichas dificultades a la vez que se salvaguarda su capacidad de generar todos los resultados interesantes sin necesidad de postularlos por separado.

La finalidad de las modificaciones propuestas al axioma de formación es únicamente la de preservar dos principios tan elementales que muchas veces son olvidados: Evitar que en una definición entre lo definido y exigir que todo objeto matemático esté bien definido.

Bibliografía

- Julián Garrido, *Verdad Matemática,* Nivola S.L. 2003