A Parte Rei. Revista de Filosofía

Sobre el papel de la intuición en las demostraciones de Euclides: ¿poseen los *Elementos* un carácter científico?

Esteban Caviedes Alfonso
esteban.caviedes@gmail.com
Universidad Nacional de Colombia
Departamento de Filosofía

Resumen: En este escrito se intenta responder a una crítica presentada por Ian Mueller a los *Elementos* de Euclides, a través de un muy breve recuento de lo dicho por Aristóteles en sus *Analíticos segundos* sobre las características que deben cumplir aquellas proposiciones que deben servir de base a cualquier demostración. De esta manera, el objetivo del presente escrito es exponer una corta reflexión sobre la manera en que debemos entender la forma del quehacer científico –y, por tanto, la mentalidad científica– de distintas épocas anteriores a la nuestra.

Palabras Clave: Euclides, Aristóteles, Ian Mueller, *Los Elementos*, *Analíticos Segundos*, cientificidad, sistematicidad, demostración, intuición.

I. Introducción

Los *Elementos* de Euclides, en comparación con la evidencia que se tiene de los desarrollos matemáticos anteriores, suponen un muy notable avance en cuanto a los aspectos matemático, geométrico y lógico se refiere. En efecto, los *Elementos* contienen, tanto en su forma de exposición como en los contenidos que dicha exposición utiliza, novedosas nociones y procedimientos que aún hoy son objeto de estudio, no sólo a la manera de simples datos históricos, sino también como importantes conceptos y pasos de lo que una *demostración*, en sentido estricto, *debe* tener y seguir. En otras palabras, al menos con respecto a la tradición occidental anterior, en los *Elementos* se hallan, por primera vez *argumentos* que no sólo basan sus premisas y consecuencias en la mera *observación empírica*, sino que se deducen lógicamente de premisas anteriormente demostradas, lo cual conlleva a la *necesidad* de las conclusiones a las que el proceso demostrativo –la de mostración misma– llega.

Así pues, los *Elementos* son el resultado de un cambio de *mentalidad*, la cual no propende ya por encontrar solución a los problemas prácticos que inevitablemente surgen al interior de toda sociedad –agrimensura, arquitectura, astronomía, contabilidad, etc.–, como bien era la mentalidad que prevalecía en el Antiguo Egipto, la Babilonia Imperial o las civilizaciones Inca y Azteca; sino como una que considera ahora como *ciencias* a la matemática, la geometría y la lógica. De aquí que sus resultados, si bien pueden servir para resolver problemas de índole práctica, no necesariamente han de tener como principal preocupación la solución de éstos. En otras palabras, si bien tales ciencias *surgieron* como respuesta a problemas prácticos, su primordial objetivo no es *ahora* su solución.

Se puede decir, entonces, que tal cambio de mentalidad está ligado íntimamente con el desarrollo de la *filosofía* imperante en tal tiempo. En efecto, habiendo vivido Euclides alrededor de los años 300 a.C. y 265 a.C., es difícil pensar que no tenía siquiera algún conocimiento de la filosofía platónica (recuérdese que Platón vivió, aproximadamente, entre el 428 a.C. y el 348 a.C.) y, muchos menos, que la filosofía aristotélica (Aristóteles nació en el 384 a.C. y murió en el 322 a.C.) no lo hubiera influenciado. En efecto, tal vez donde se note mejor esta última relación entre filosofía y geometría y matemática, es en el criterio que Euclides siguió para seleccionar las *definiciones* y las *nociones comunes* que utilizó en todas las demostraciones que en los *Elementos* llevó a cabo. Justamente, creemos en este escrito que la razón por la que escogió *determinadas* definiciones y nociones comunes como las bases de todo su proceder se puede encontrar en lo que Aristóteles determinó, en los *Analíticos segundos* (o *posteriores*), como las condiciones indispensables que las premisas de todo razonamiento deben tener para poder hacer ciencia.

Por otro lado, Ian Mueller, en su artículo *Euclid's Elements and the Axiomatic Method*, critica el papel que la *intuición* –entendida como aquella vía *inmediata* por medio de la cual conocemos algo que nos es presentado– juega en los *Elementos*, con lo que trata de mostrar cómo tal obra no posee el grado de *abstracción* y *sistematicidad* que tradicionalmente se le ha adjudicado. Así, el punto que defiende Mueller es que el reciente –para el tiempo en que se publicó su artículo– estatus de intuitivo y empírico, y por tanto poco científico, que se le ha dado a los *Elementos*, debe mantenerse. Ante esta postura, en este escrito pretendemos mostrar, de la manera mas sucinta posible, cómo tal crítica, a pesar de ser aguda y consistente, no menoscaba el carácter científico de los *Elementos*, dado que, en efecto, los planteamientos de esta obra cumplen con los criterios que para la época caracterizaban a una obra como 'científica', los cuales estaban establecidos por Aristóteles en sus *Analíticos Posteriores*. Así pues, esperamos mostrar, en general, que los axiomas y postulados de Euclides satisfacen las exigencias científicas aristotélicas, y que desconocer el contexto científico propio de cada época constituye un gran error en la valoración de ésta.

II. Pruebas euclidianas

En esta sección nos centraremos en las proposiciones 21 y 22 del Libro IX de los *Elementos*, puesto que son pruebas en las que Ian Mueller se fija especialmente en su artículo (cf *EAM* 301 y ss) para mostrar aquello que Euclides asume tácitamente, pero que no definió ni especificó que iba a usar –lo cual, a la luz de la moderna axiomatización, es lo que Euclides se proponía–. Aquí reconstruiremos las pruebas de manera sencilla, pero lo más completamente posible, dejando las observaciones que hace Mueller para la siguiente sección. Las pruebas van así:

Proposición 21: "Si cualquier número de números pares se coloca junto, el número total es par". En otras palabras, "Si cualquier cantidad de números pares es sumada, el resultado es asimismo par".

Prueba:

El diagrama, para Euclides, de esta prueba es el siguiente:

Hipótesis) Si cualquier cantidad de números *pares* se suma, números llamados, respectivamente, AB, BC, CD, DE, entonces el número que resulta de esa suma, esto es, AE, es *par*.

I) Un número par es aquel que puede ser dividido en dos partes *iguales* (esto es, puede ser dividido entre 2 sin dejar residuo).
II) Dado que cada uno de esos números AB, BC, CD, DE es par, entonces cada uno de ellos puede ser dividido en dos partes iguales.
III) Por lo tanto, el número completo (AE) formado a partir de estos números tendrá, así mismo, dos partes iguales (puesto que los números de los que se compone también tiene, cada uno, dos partes iguales, como se probó en (II)).
IV) Decir que un número par es aquel que tiene dos partes iguales es lo mismo que decir que un número par es aquel que se puede dividir en dos partes iguales (en este paso se está recordando la premisa (I)).
V) AE tiene dos partes iguales (por (III)).

Conclusión) Por lo tanto, AE es par (por (IV) y (V)).

Proposición 22: "Si cualquier número de números impares se coloca junto, el número total es par". En otras palabras, "Si cualquier cantidad de números impares es sumada, el resultado es par".

Prueba:

El diagrama euclidiano para esta prueba es el siguiente:

Hipótesis) Si cualquier cantidad de números *impares* se suma, números llamados, respectivamente, AB, BC, CD, DE, entonces el número que resulta de esa suma, esto es, AE, es *par*.

I) Un número impar es aquel que al serle retirada una unidad, entonces se convierte en par.
II) Dado que cada uno de esos números AB, BC, CD, DE es impar, entonces a cada uno de ellos puede serle retirada una unidad, por lo que cada uno se convertirá en par (por (I)).
III) El número que resulta de juntar los números ahora convertidos en pares, es par, puesto que al juntar números pares se produce un número par (lo cual es la conclusión de la proposición anterior).
IV) Por otro lado, el total de unidades retiradas a los números es par.
V) Por lo tanto, el número resultante de juntar los números pares junto al total de las unidades retiradas de ellos (total que es par), es par.
VI) Dicho número resultante es AE.

Conclusión) Por lo tanto, AE es par (por (VI)).

III. Las objeciones de Mueller

En general, en *Euclid's Elements and the Axiomatic Method* Mueller defiende la tesis de que no es posible justificar el desarrollo de la matemática griega a partir de los *Elementos* de Euclides. En otras palabras, según Mueller no es posible sostener la tesis según la cual los *Elementos* fueron la base más sólida para el desarrollo de la matemática griega. En efecto, Mueller considera que, por un lado, las hipótesis acerca de la conexión entre filosofía y matemáticas –conexión mediante la que se explicaría gran parte del desarrollo de esta última– y, por otro lado, las hipótesis referentes a sostener la supuesta conexión entre las filosofías eleática y platónica, "[d]ada la ausencia de información detallada sobre la matemática griega temprana" (*EAM* 289), son *indecidibles* [*undecidable*] y, por tanto, innecesarias. El hilo conductor de la posición de Mueller consiste en una crítica a la postura de académicos como A. Szabó, sobre quien especialmente Mueller dice lo siguiente: "[e]n justificación de su concepción de la matemática griega, Szabó depende mucho más de la aritmética griega que de su geometría. Más aún, es tal vez más preciso decir que él insiste en las falsas apariencias [que pueden surgir] de la geometría como base para sus inferencias sobre la matemática griega" (*EAM* 301). Así, en el desarrollo de su crítica, Mueller sostiene su tesis mediante las continuas comparaciones entre el sistema de los *Elementos* y la axiomática moderna –teniendo especialmente en cuenta los desarrollos de David Hilbert–, comparaciones de las que saca en limpio que los *Elementos*, no obstante su explícito carácter deductivo, no son, en sentido estricto –esto es, el sentido axiomático moderno– *formales.*

Para mostrar más claramente la posición de Mueller, vamos a la primera de las pruebas de las proposiciones mencionadas en la sección anterior.

Mueller se vale de la comparación que hizo Szabó entre las pruebas de las proposiciones que aquí reprodujimos en la sección anterior y las que él (Szabó) considera son 'intuitivas y empíricas', anteriores a Euclides. Estas últimas se basan en el método de usar piedrecillas coloreadas para representar cantidades, de manera que es más fácil seguir cada paso de la prueba. Así, el diagrama de la prueba de la proposición 21 con tal método sería de la siguiente manera:

i) Supongamos que los números son cuatro, seis, diez y dos; los cuales se representan de la siguiente manera (a este paso corresponden las premisas (I) y (II)):

○○●● ○○○●●● ○○○○○●●●●● ○●

ii) Poner juntos los números es lo mismo que poner juntas todas las piedrecillas, con lo que el diagrama queda así (esto corresponde al paso (III)):

○○●●○○○●●●○○○○○●●●●●○●

iii) Por último, reordenando las piedrecillas, para ver más fácil el resultado, se obtiene este diagrama (que corresponde a los pasos (IV), (V) y la conclusión):

○○○○○○○○○○○●●●●●●●●●●●

Ahora bien, la diferencia entre la prueba que ofrecimos en la primera sección y ésta que acabamos de exponer, subyace precisamente en el carácter intuitivo con el que en ésta última se ejemplifican los pasos, especialmente, la manera de *ordenar* las piedrecillas: en efecto, aquí se *ve* propiamente tanto la separación en mitades de los números pares, el agrupamiento total de los números, y el que las mitades reunidas sean a su vez una cantidad par, como la conclusión de la prueba –en efecto, 22, que es el número total de piedrecillas, es par–.

Así pues, en el contraste entre la prueba euclidiana y ésta, el punto más sobresaliente es que Euclides hace uso de las propiedades *conmutativa y asociativa* de la aritmética, lo cual no está explícitamente dicho en los *Elementos*. Este es precisamente el punto que le más le interesa a Mueller: "[e]l uso tácito de estas propiedades muestra que la aritmética euclidiana se basa en la intuición tanto como la geometría" (*EAM* 303). Así para Mueller, se puede decir que fue "obvio" para Euclides el que, al sumar, el orden de los sumandos no alterara el resultado, y que, por lo tanto, es posible que le haya ocurrido lo mismo –haber utilizado propiedades o definiciones que para él fueran "obvias"– con otro tipo de pruebas, por ejemplo, al decir que "al trazar un línea desde un punto interior del círculo a uno exterior dicha línea intersecaba al círculo" (*EAM* 303). Así pues, siguiendo a Mueller, a partir de estas "obviedades" pasadas por alto, es válido criticar el carácter poco científico de los *Elementos* y proponer que su carácter es más bien altamente empírico e intuitivo, con lo cual la universalidad y necesidad de sus objetivos quedaría en entredicho.

IV. La tipología de las premisas científicas

Según Jonathan Barnes, los *Analíticos Segundos* de Aristóteles "(...) se ocupan de estudiar la naturaleza de los propios axiomas y, por tanto, de la *forma general* de una *ciencia axiomatizada*" (*A* 59, cursivas nuestras). En otras palabras, en su obra mencionada, el Estagirita se preocupa por determinar qué tipo de proposiciones son aptas para servir como *base* de una ciencia, puesto que toda ciencia, en tanto su objetivo es servirnos para *conocer*, debe partir de algo; de lo contrario, no sería ciencia: "[c]reemos que sabemos cada cosa sin más, pero no del modo sofístico, accidental, cuando creemos conocer la causa por la que es la cosa, que es la causa de aquella cosa y que no cabe que sea de otra manera"(*AS* 71b9-12). Ahora bien, dado que un *conocimiento científico* es aquel que buscar mostrar *por qué* algo se da, o sucede, etc., toda ciencia, en cuanto ciencia, es *demostrativa*. Así pues, todas las deducciones que se lleven a cabo en la ciencia deben partir de ciertos principios, para por medio de éstos, justamente, poder demostrar y, por tanto, conocer. Sobre tales principios, Aristóteles fija las siguientes condiciones:

i) Que sean verdaderos (esto es, "ciertos").
ii) Que sean primeros –es decir, que sean indemostrables–. Tal característica es necesaria, porque de lo contrario se necesitaría demostrar las premisas de las que se sigue la conclusión, y las premisas que permiten concluir tales premisas y así sucesivamente, haciendo el conocimiento un regreso al infinito.
iii) Que sean inmediatos (o sea, "intuitivos").
iv) Que sean más conocidos (también se podría decir, "familiares").
v) Que sean anteriores –es decir, que al fijar nuestra atención sobre ellos, no resulte difícil saber que son verdaderos–.
vi) Que sean causales respecto de la conclusión. En otras palabras, que sean causas de sus efectos, esto es, que la expliquen suficientemente –cf *AS* 71b20-25–.

Ahora bien, al comienzo del libro primero de los *Analíticos Segundos* Aristóteles sostiene que: "[t]oda enseñanza y todo aprendizaje por el pensamiento se producen a partir de un conocimiento preexistente" (*AS* 71a1-2), lo cual "(...) es evidente a los que observan cada una de esas enseñanzas" (ídem.). De aquí que sea posible partir de algo mutuamente acordado, o mediante razonamientos o mediante comprobación –caso éste en el que se incluye el conocimiento por ejemplos–. Es claro, sin embargo, que puede darse el caso –por ejemplo, en los razonamientos sofistas– de que, a pesar de partir de un ejemplo, o de un mutuo acuerdo, la conclusión sea patentemente falsa; o bien, contraria a una tesis que se tiene como indudable. Consideramos que, precisamente para excluir estos casos, y para mostrar qué es lo verdaderamente indispensable en una demostración científica, por lo que Aristóteles fijó las condiciones que expuestas más arriba. Ahora bien, en el caso de los *Elementos*, los principios de los que parte Euclides en sus demostraciones son las *definiciones* y las *nociones comunes* –a las cuales se les puede llamar también *axiomas*–. Ejemplos de ambas cosas, tomados del Libro I, son:

i) Definición I: Un *punto* es lo que no tiene partes.
ii) Definición II: Una línea es longitud sin anchura.
iii) Definición III: Los extremos de una línea son puntos.
iv) Definición IV: Una *línea recta* es aquella que yace por igual respecto de los puntos que están en ella.

a) Axioma I: Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
b) Axioma II: Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales también.
c) Axioma III: Si a cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales también.
d) Axioma IV: Las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí.

En estos ejemplos, es fácil notar que las definiciones tienen un carácter eminentemente *geométrico*, en tanto que los axiomas parecen tener uno más bien *aritmético*. En efecto, nótese –aunque parezca una perogrullada– que las definiciones hacen referencia sobre todo a nociones geométricas (“puntos”, “líneas”), justamente porque son aquello que definen; en tanto que los axiomas se refieren, en un tono mucho más general, a “cosas” e “igualdades”, sin que se defina ninguno de estos términos.

A pesar de esto, la aplicación de los axiomas a las definiciones no pierde por ello su carácter deductivo: antes bien, esto parece hacer más rigurosa la base de una demostración que se lleve a cabo a partir de tales principios. Es por esto que, a nuestro parecer, estos axiomas y definiciones parecen ser acordes con las condiciones que establece Aristóteles. Y si, como hay evidencia, tales condiciones constituían algo así como el paradigma científico de la época, el punto de Mueller –según el cual Euclides no explicitó, ni definió, el uso de ciertas propiedades por parecerle obvias–, a pesar de ser cierto –como vimos en la tercera sección–, no nos parece, por tanto, válido para negar el carácter científico de los *Elementos*. En efecto, podemos concluir que, conforme pasa el tiempo, en cada época de su historia la humanidad ha formulado su propia concepción –determinada por infinitud de variables– de lo que podría ser denominado como su estándar científico propio; por lo que juzgar dichas concepciones desde una época posterior a las que ocurrieron, en una posición indudablemente más cómoda debido a todas las ventajas que da el desarrollo técnico y teórico, sólo determina qué tan erradas eran las teorías científicas del momento, pero no su carácter de tales.

Bibliografía

[*AS*] Aristóteles. “Analíticos segundos”. En: *Tratados de Lógica (Órganon)*. Traducción de Miguel Candel Sanmartín. Vol. II, pp. 313-349. Madrid: Gredos, 1988
[*EAM*] Mueller, Ian. “Euclid's Elements and the Axiomatic Method”. En: *The British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 20, No. 4 (Dic. 1969), pp. 289-309 [la traducción de las citas es propia]

[*A*] Barnes, Jonathan. *Aristóteles*. Traducción de Marta Sansigre Vidal. Madrid: Cátedra (colección Teorema), 1999

Los *Elementos* pueden encontrarse en línea en:
http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm